

## 1.4 RADICALES

•  $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$ .

$\sqrt[n]{a}$  se llama **radical**,  $a$  **radicando** y  $n$  **índice** de la raíz.

• **Propiedades:**

①  $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

②  $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

③  $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

④  $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

⑤  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

⑥  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

⑦  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

• Para reducir a índice común varios radicales, pueden expresarse como potencias de exponentes fraccionarios y reducir estos a común denominador.

1 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario:

a)  $\sqrt[6]{a^5}$

b)  $\sqrt[4]{a^3}$

c)  $\sqrt[3]{3^4}$

d)  $\sqrt[3]{x}$

e)  $\sqrt{n}$

f)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

g)  $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

h)  $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

i)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2 Escribe en forma de raíz las siguientes potencias:

a)  $3^{4/5}$

b)  $2^{1/2}$

c)  $a^{3/4}$

d)  $x^{-1/2}$

e)  $a^{-3/4}$

f)  $n^{1/2}$

g)  $x^{-2/3}$

h)  $5^{-1/2}$

i)  $3^{-4/5}$

3 Simplifica, sacando de la raíz los factores que puedas:

a)  $\sqrt[3]{x^7}$

b)  $\sqrt[4]{x^8}$

c)  $\sqrt{x^9}$

d)  $\sqrt{a^3}$

e)  $\sqrt[3]{16}$

f)  $\sqrt[3]{81}$

g)  $\sqrt{32}$

h)  $\sqrt{243}$

i)  $\sqrt[3]{1024}$

4 Simplifica:

a)  $\sqrt{a^3 x^2}$

b)  $\sqrt[3]{x^5 y^6}$

c)  $\sqrt{9x^3 y^2}$

d)  $\sqrt{\frac{16a^5}{8a}}$

e)  $\sqrt[3]{-81a^3}$

f)  $\sqrt{1 + \frac{16}{9}}$

g)  $\sqrt[3]{27a^4}$

h)  $\sqrt{16x + 16}$

i)  $\sqrt{25x^3 + 25x^2}$

5 Reduce a índice común en cada caso:

a)  $\sqrt[4]{x^3}$  y  $\sqrt[3]{x^2}$

b)  $\sqrt{3}$  y  $\sqrt[4]{3^5}$

6 Ordena de menor a mayor los siguientes radicales, reduciéndolos previamente a índice común:

a)  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[4]{4}$

b)  $\sqrt[3]{7}$ ,  $\sqrt[2]{25}$

c)  $\sqrt[6]{6561}$ ,  $\sqrt[3]{81}$ ,  $\sqrt{18}$

7 Efectúa y simplifica si es posible:

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{x}} \cdot x^{1/6}$

b)  $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^4}$

c)  $3\sqrt{75} \cdot 4\sqrt{48}$

d)  $\sqrt{\frac{12}{10}} \cdot \sqrt{\frac{27}{40}}$

e)  $(\sqrt{\sqrt{2}})^4$

f)  $\sqrt{\frac{x^3 y^2}{z^6}} : \sqrt[3]{\frac{x^2 y^3}{z^4}}$

g)  $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^4}} \cdot \sqrt{x^5}$

h)  $(\sqrt{2}\sqrt{2})^3$

i)  $\frac{5}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{a^4}} \cdot a^{1/3}$

j)  $\frac{a^{-1/2} \cdot a^{3/4}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}$

k)  $\frac{a^{-4} \cdot a^{-1/3} \cdot \sqrt[3]{a}}{3\sqrt{a}}$

l)  $(\sqrt{3}\sqrt{3\sqrt{3}})^2 : \sqrt[4]{27}$

m)  $\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}\right)^2 : \frac{1}{a^2}$

n)  $\sqrt[3]{a^{-2}} : \sqrt[6]{a}$

ñ)  $\left(\frac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{2}}\right)^3$

o)  $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \frac{\sqrt{27}}{2}$

p)  $\frac{(2\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt[3]{2}}{4}$

q)  $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \frac{\sqrt{125}}{2}$

## EJERCICIO RESUELTO

Calcula y simplifica:

$$3\sqrt{72} - \sqrt{18} + 5\sqrt{2} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8}$$

RESOLUCIÓN

Descomponemos en factores primos, extraemos de la raíz los factores que podamos y simplificamos:

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{2^3 \cdot 3^2} - \sqrt{2 \cdot 3^2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - 2\sqrt{2^3} = \\ & = 3 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} = \\ & = 18\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 21\sqrt{2} \end{aligned}$$

8 Calcula y simplifica:

a)  $9\sqrt{27} + 2\sqrt{3} - 8\sqrt{300} - 4\sqrt{3}$

b)  $\frac{3\sqrt{45}}{2} - \frac{\sqrt{20}}{3} + 4\sqrt{125} - \sqrt{5}$

c)  $8\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{20} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{18}$

d)  $\sqrt{1+x} - 4\sqrt{16+16x} + 3\sqrt{25+25x}$

e)  $8\sqrt[3]{x^3 a^2} - \sqrt[3]{x^6 a^5}$

9 Calcula y simplifica:

a)  $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$

b)  $(1 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$

c)  $(1 + \sqrt{2})^2$

d)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

e)  $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

f)  $(4 - \sqrt{6})(4 + \sqrt{6})$

g)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

h)  $(2\sqrt{3} + 1)^2$

A veces conviene suprimir los radicales del denominador (racionalizar).

- Para suprimir una raíz cuadrada, multiplicamos por la misma raíz.
- Para suprimir una raíz  $n$ -ésima, multiplicamos por otra raíz  $n$ -ésima de forma que se complete en el radicando una potencia  $n$ -ésima.
- En una suma de raíces cuadradas,  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ , se suprimen los radicales multiplicando por la diferencia de ellas (su conjugado),  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ , y recíprocamente.

### EJERCICIO RESUELTO

**Racionaliza y simplifica:**

a)  $\frac{4}{\sqrt{3}}$

b)  $\frac{7}{\sqrt[3]{a^3}}$

c)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

**RESOLUCIÓN**

a)  $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b)  $\frac{7}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{7\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^5}} = \frac{7\sqrt[3]{a^2}}{a}$

c)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2^2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{10}+2}{5-2} = \frac{\sqrt{10}+2}{3}$

**10** Racionaliza y simplifica:

a)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$

b)  $\frac{4}{\sqrt{27}}$

c)  $\sqrt{\frac{3}{7}}$

d)  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

e)  $\frac{4}{\sqrt{2}}$

f)  $\frac{2}{\sqrt{2}}$

g)  $\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$

h)  $\frac{3}{\sqrt[3]{18}}$

i)  $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

j)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

k)  $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

l)  $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

11) Racionaliza y simplifica:

a)  $\frac{3}{1 + \sqrt{2}}$

b)  $\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

c)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

d)  $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

e)  $\frac{2}{\sqrt{4} - \sqrt{7}}$

f)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}$

g)  $\frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{2} - 1)}$

h)  $\frac{1}{5\sqrt{3} + 2}$

i)  $\frac{1 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 1}$

j)  $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

k)  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

l)  $\frac{4 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}$

12) Racionaliza y efectúa, simplificando al máximo las siguientes expresiones:

a)  $\frac{1 - \sqrt{2}}{(3\sqrt{2} + 1)^2}$

b)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

c)  $1 + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}}$

d)  $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

e)  $\frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{2})^2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

f)  $\frac{(\sqrt{2} + 1)^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{\sqrt{2}}$

g)  $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} - \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

## 1.5 LOGARITMOS

- Se llama **logaritmo en base  $a$  de  $P$**  ( $a > 0$ ), y se designa  $\log_a P$ , al exponente al que hay que elevar la base  $a$  para obtener  $P$ ; es decir:

$$\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$$

- Los logaritmos en base 10 se llaman **logaritmos decimales** y se designan  $\log$  (se pueden calcular utilizando la tecla  $\log$  de la calculadora).
- Los logaritmos cuya base es el número  $e$  se llaman **logaritmos neperianos** y se designan  $\ln$  (se pueden calcular utilizando la tecla  $\ln$  de la calculadora).

1 Calcula, basándote en la definición de logaritmo:

- |                         |                         |                               |                           |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| a) $\log_3 81$          | b) $\log_3 3$           | c) $\log_3 3^2$               | d) $\log_3 3^{-1}$        |
| e) $\log_3 \frac{1}{3}$ | f) $\log_3 \frac{1}{9}$ | g) $\log_3 3^{5/2}$           | h) $\log_3 \sqrt[4]{3^5}$ |
| i) $\log_3 \sqrt{3}$    | j) $\log 10$            | k) $\log 100$                 | l) $\log \frac{1}{100}$   |
| m) $\log 0,001$         | n) $\log \sqrt{0,001}$  | ñ) $\log \sqrt{\frac{1}{10}}$ | o) $\ln e$                |
| p) $\ln e^3$            | q) $\ln 1$              | r) $\ln \sqrt{e}$             | s) $\ln \sqrt[3]{1/e}$    |

2 Halla, con ayuda de la calculadora, los siguientes logaritmos:

- |                            |                           |                             |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| a) $\log 5$                | b) $\log 2$               | c) $\log \frac{1}{4}$       |
| d) $\ln 7$                 | e) $\ln \frac{1}{2}$      | f) $\ln \sqrt{5}$           |
| g) $\log (5,1 \cdot 10^8)$ | h) $\ln (3,2 \cdot 10^9)$ | i) $\log (5 \cdot 10^{-6})$ |

3 Halla el valor de  $x$  en cada caso, utilizando la definición de logaritmo:

- |                   |                       |                    |
|-------------------|-----------------------|--------------------|
| a) $\log_3 x = 2$ | b) $\log_x 2 = 1$     | c) $\log_3 81 = x$ |
| d) $\log x = 3$   | e) $\ln x = 1$        | f) $\log_4 x = 0$  |
| g) $\log_x 9 = 2$ | h) $\log (x + 1) = 2$ | i) $\log (2x) = 1$ |

### Propiedades de los logaritmos:

①  $\log_a a = 1$

②  $\log_a 1 = 0$

③  $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$

④  $\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$

⑤  $\log_a P^n = n \log_a P$

⑥  $\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$

⑦ Cambio de base:  $\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$

### EJERCICIO RESUELTO

a) Sabiendo que  $\log_2 x = 2,3$  y  $\log_2 y = 1,2$ ; calcula:

$$\log_2 \frac{x^2 y}{4} \qquad \log_2 \frac{8\sqrt{x^5}}{y^3}$$

b) Expresa como un solo logaritmo la expresión:

$$\frac{3}{2} \log A - 2 \log B + \log C$$

c) Calcula  $\log_3 78$ .

### RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_2 \frac{x^2 y}{4} &= \log_2 x^2 + \log_2 y - \log_2 4 = 2 \log_2 x + \log_2 y - \log_2 4 = \\ &= 2 \cdot 2,3 + 1,2 - 2 = 3,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{8\sqrt{x^5}}{y^3} &= \log_2 8 + \log_2 \sqrt{x^5} - \log_2 y^3 = \log_2 8 + \log_2 x^{5/2} - \log_2 y^3 = \\ &= \log_2 8 + \frac{5}{2} \log_2 x - 3 \log_2 y = 3 + \frac{5}{2} \cdot 2,3 - 3 \cdot 1,2 = 5,15 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{3}{2} \log A - 2 \log B + \log C = \log A^{3/2} - \log B^2 + \log C = \log \frac{A^{3/2} C}{B^2} = \log \frac{\sqrt{A^3} \cdot C}{B^2}$$

$$\text{c) } \log_3 78 = \frac{\log 78}{\log 3} = 3,9656... \approx 3,97$$

\* Calculadora:  $\log 78 \div \log 3 = 3.965647273$

4 Halla con ayuda de la calculadora:

a)  $\log_2 3$

b)  $\log_2 35$

c)  $\log_3 \sqrt{5}$

d)  $\log_2 10$

e)  $3 \log_5 \frac{7}{3}$

f)  $\ln 4 - \log_2 6$

5 Sabiendo que  $\log_3 x = 1,6$ , calcula:

a)  $\log_3 \sqrt[5]{x^2}$

b)  $\log_3 9x^2$

c)  $\log_3 \sqrt{\frac{1}{x}}$

6 Sabiendo que  $\log A = -1,2$ ,  $\log B = 0,7$  y  $\log C = 2,3$ , calcula:

a)  $\log \frac{A^2 B}{C^3}$

b)  $\log \sqrt[3]{\frac{A^2}{100B}}$

c)  $\log \sqrt{\frac{AB}{C}}$

d)  $\log (0,1A^2 B^3)$

e)  $\log \frac{\sqrt[3]{A^2 B}}{10C}$

f)  $\log \frac{\sqrt[6]{A^5 \cdot B^3}}{\sqrt{C}}$

7 Expresa como un solo logaritmo cada una de las siguientes expresiones:

a)  $2\log_2 A - 3\log_2 B$

b)  $\ln A + 2\ln B - \ln C$

c)  $\frac{1}{2}\log A - \frac{\log B}{3} + 2\log C$

d)  $\frac{3}{4}\log A - \frac{2}{5}\log B$

e)  $\frac{2}{3}\ln A - \ln B - \frac{3}{2}\ln C$

8 Halla el valor de  $x$  en cada caso, aplicando las propiedades de los logaritmos:

a)  $\log x = \log 25 - \log 2$

b)  $\log x = 2 \log 3 + 3 \log 2$

c)  $\ln x = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 4$

d)  $\log_2 x = 4 \log_2 3 - \frac{1}{3} \log_2 27$

e)  $\ln x = \frac{1}{2} \ln 25 + 2 \ln 3 - \ln 4$



- b)  $1,33 \cdot 10^3$   
 c)  $3,66 \cdot 10^{-20}$   
 d)  $1,26 \cdot 10^3$

- ◆ a)  $1,89 \cdot 10^{-10}$   
 b)  $2,40 \cdot 10^{-15}$

- ◆ a)  $2,5 \cdot 10^{13}$   
 b) 40 millones de personas =  $4 \cdot 10^7$  personas.  
 $(4 \cdot 10^7) \cdot (2,5 \cdot 10^{13}) = 1 \cdot 10^{21} = 10^{21}$  glóbulos rojos tendrán aproximadamente 40 millones de personas.

### Página 8

- ◆ a)  $a^{5/6}$                       b)  $a^{3/2}$   
 c)  $3^{4/5}$                         d)  $x^{1/3}$   
 e)  $n^{1/2}$                          f)  $x^{-2/3}$   
 g)  $a^{-3/2}$                       h)  $a^{-2/3}$   
 i)  $x^{-1/2}$

- ◆ a)  $\sqrt[3]{3^4}$                         b)  $\sqrt{2}$   
 c)  $\sqrt[4]{a^3}$                         d)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$   
 e)  $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$                         f)  $\sqrt{n}$   
 g)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$                         h)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$   
 i)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3^4}}$

- ◆ a)  $x^2 \sqrt[3]{x}$                       b)  $x^2$   
 c)  $x \sqrt[5]{x^4}$                         d)  $a \sqrt{a}$   
 e)  $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$                 f)  $\sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$

- g)  $\sqrt{2^5} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$     h)  $\sqrt{3^5} = 9\sqrt{3}$   
 i)  $\sqrt[3]{2^{10}} = 2^2 = 4$

- ◆ a)  $a x \sqrt{a}$   
 b)  $x y^2 \sqrt[3]{x^2}$   
 c)  $3x y \sqrt{x}$   
 d)  $\sqrt{2 a^4} = a^2 \sqrt{2}$   
 e)  $\sqrt[3]{-3^4 a^3} = -3a \sqrt[3]{3}$   
 f)  $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$   
 g)  $\sqrt[3]{3^3 a^4} = 3a \sqrt[3]{a}$   
 h)  $\sqrt{16(x+1)} = 4\sqrt{x+1}$   
 i)  $\sqrt{25x^2(x+1)} = 5x\sqrt{x+1}$

### Página 9

- ◆ a)  $\sqrt[12]{x^9}$  y  $\sqrt[12]{x^8}$                       b)  $\sqrt[3]{3^2}$  y  $\sqrt[3]{3^5}$

◆ a)  $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$   
 $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$   
 $\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}$  }  $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$

b)  $\sqrt[3]{7} = \sqrt[15]{7^5} = \sqrt[15]{16807}$   
 $\sqrt[5]{25} = \sqrt[15]{25^3} = \sqrt[15]{15625}$  }  $\sqrt[5]{25} < \sqrt[3]{7}$

c)  $\sqrt[6]{6561}$   
 $\sqrt[3]{81} = \sqrt[6]{81^2} = \sqrt[6]{6561}$   
 $\sqrt{18} = \sqrt[6]{18^3} = \sqrt[6]{5832}$  }  $\sqrt{18} < \sqrt[3]{81} = \sqrt[6]{6561}$

- ◆ a)  $x^{1/6} \cdot x^{1/6} = x^{2/6} = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$   
 b)  $\sqrt[3]{n^2}$

$$c) 3\sqrt{3 \cdot 5^2} \cdot 4\sqrt{2^4 \cdot 3} = 15\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} = 720$$

$$d) \sqrt{\frac{324}{400}} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10}$$

$$e) (\sqrt[8]{2})^4 = 2^{4/8} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$f) \sqrt[6]{\frac{x^9 y^6}{z^{18}} : \frac{x^4 y^6}{z^8}} = \sqrt[6]{\frac{x^9 y^6 z^8}{x^4 y^6 z^{18}}} = \sqrt[6]{\frac{x^5}{z^{10}}} = \frac{1}{z} \sqrt[6]{\frac{x^5}{z^4}}$$

$$g) \sqrt[6]{x^4 \cdot \frac{1}{x^8} \cdot x^{15}} = \sqrt[6]{x^{11}} = x \sqrt[6]{x^5}$$

$$h) (\sqrt[4]{2^3})^3 = \sqrt[4]{2^9} = 2^2 \sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2}$$

$$i) \frac{5}{3} a^{-4/3} \cdot a^{1/3} = \frac{5}{3a}$$

$$j) \frac{a^{-1/2} \cdot a^{3/4}}{a^{1/2} \cdot a^{2/3}} = a^{-11/12} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^{11}}}$$

$$k) \frac{a^{-4} \cdot a^{-1/3} \cdot a^{1/3}}{3 \cdot a^{1/2}} = \frac{1}{3 \cdot a^{9/2}} = \frac{1}{3\sqrt{a^9}} = \frac{1}{3a^4 \sqrt{a}}$$

$$l) (\sqrt[8]{3^7})^2 : \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^7} : \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$m) \left(\frac{a^{2/3}}{a^{1/2}}\right)^2 : \frac{1}{a^2} = a^{1/3} : a^{-2} = a^{7/3} = a^2 \sqrt[3]{a}$$

$$n) a^{-2/3} : a^{1/6} = a^{-5/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$$

$$\tilde{n}) \left(\frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot \sqrt{25}}}{\sqrt{2}}\right)^3 : \left(\frac{2 \cdot 2^2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3 = (2^3)^3 = 2^9 = 512$$

$$o) \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \frac{\sqrt{3^3}}{2} = \frac{3^{5/3}}{2} = \frac{\sqrt[3]{3^5}}{2} = \frac{3\sqrt{9}}{2}$$

$$p) \frac{8 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{4} = 4 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/3} = 4 \cdot 2^{5/6} = 4\sqrt[6]{2^5} = 4\sqrt[6]{32}$$

$$q) \frac{5^{1/3} \cdot 5^{3/2}}{5 \cdot 2} = \frac{5^{11/6}}{5 \cdot 2} = \frac{5 \sqrt[6]{5^5}}{5 \cdot 2} = \frac{\sqrt[6]{3125}}{2}$$

## Página 10

$$\diamond a) 9\sqrt{3^3} + 2\sqrt{3} - 8\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} - 4\sqrt{3} = 27\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 80\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -55\sqrt{3}$$

$$b) \frac{3\sqrt{3^2 \cdot 5}}{2} - \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5}}{3} + 4\sqrt{5^3} - \sqrt{5} = \frac{9\sqrt{5}}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{3} + 20\sqrt{5} - \sqrt{5} = \frac{137\sqrt{5}}{6}$$

$$c) 8\sqrt{2^3} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 5} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{3^2 \cdot 2} = 16\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 9\sqrt{2} = 20\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$$

$$d) \sqrt{1+x} - 4\sqrt{16(1+x)} + 3\sqrt{25(1+x)} = \sqrt{1+x} - 16\sqrt{1+x} + 15\sqrt{1+x} = 0$$

$$e) 8x\sqrt[3]{a^2} - x^2 a \sqrt[3]{a^2} = (8x - x^2 a) \sqrt[3]{a^2}$$

$$\diamond a) 9 - 2 = 7$$

$$b) 3 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$c) 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$d) 3 - 2 = 1$$

$$e) \sqrt{15} + 3 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$$

$$f) 16 - 6 = 10$$

$$g) 3 + 2 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$h) 12 + 1 + 4\sqrt{3} = 13 + 4\sqrt{3}$$

## Página 11

$$\diamond a) \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$b) \frac{4}{\sqrt{3^3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$c) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$e) \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4} \quad f) \sqrt{2}$$

$$g) \frac{5\sqrt[5]{5^3}}{5} = \sqrt[5]{125}$$

$$h) \frac{3}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 2}} = \frac{3\sqrt[3]{3 \cdot 2^2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$$

$$i) \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x^2} \quad j) \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$k) \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt[6]{3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2}}{3} = \frac{\sqrt[6]{3^4 \cdot 2^3}}{3} = \frac{\sqrt[6]{648}}{3}$$

$$l) \frac{(2 + \sqrt{2})\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{2} = \sqrt{2} + 1$$

## Página 12

$$a) \frac{3(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{1 - 2} = 3\sqrt{2} - 3$$

$$b) \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{\sqrt{3} - 3}{-2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$c) \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{\sqrt{10} + 2}{3}$$

$$d) \frac{1 + (\sqrt{2})^2}{1 - 2} = -(1 + \sqrt{2})^2 =$$

$$= (1 + 2 + 2\sqrt{2}) = -3 - 2\sqrt{2}$$

$$e) \frac{2(\sqrt{4} + \sqrt{7})}{4 - 7} = \frac{-2\sqrt{4} - 2\sqrt{7}}{3}$$

$$f) \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = -\sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

$$g) \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{3(2 - 1)} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{3}$$

$$h) \frac{5\sqrt{3} - 2}{75 - 4} = \frac{5\sqrt{3} - 2}{71}$$

$$i) \frac{(1 - \sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)}{18 - 1} = \frac{-7 + 4\sqrt{2}}{17}$$

$$j) \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$$

$$k) \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = -5 + 2\sqrt{6}$$

$$l) \frac{(4 + \sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1)}{8 - 1} = \frac{8 + 9\sqrt{2}}{7}$$

$$a) \frac{31 - 25\sqrt{2}}{289}$$

$$b) \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = -4\sqrt{6}$$

$$c) 1 + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt{5}$$

$$e) (11\sqrt{2} - 12)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$$

$$= 11\sqrt{6} - 22 - 12\sqrt{3} + 12\sqrt{2}$$

$$f) \frac{[(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)]^2}{\sqrt{2}} = \frac{1^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g) -4$$

## Página 13

$$a) 4$$

$$b) 1$$

$$c) 2$$

$$d) -1$$

$$e) -1$$

$$f) -2$$

$$g) \frac{5}{2}$$

$$h) \frac{5}{4}$$

$$i) \frac{1}{2}$$

$$j) 1$$

$$k) 2$$

$$l) -2$$

$$m) -3$$

$$n) \frac{-3}{2}$$

$$ñ) \frac{-1}{2}$$

$$o) 1$$

$$p) 3$$

$$q) 0$$

$$r) \frac{1}{2}$$

$$s) \frac{-1}{3}$$

- a) 0,699                      b) 0,301  
 c) -0,602                    d) 1,946  
 e) -0,693                    f) 0,805  
 g) 8,708                      h) 21,886  
 i) -5,301

- a)  $x = 9$                       b)  $x = 2$   
 c)  $x = 4$                       d)  $x = 1000$   
 e)  $x = e$                       f)  $x = 1$   
 g)  $x = 3$   
 h)  $x + 1 = 100 \rightarrow x = 99$   
 i)  $2x = 10 \rightarrow x = 5$

### Página 15

- a) 1,585                      b) 5,129  
 c) 0,732                      d) 3,322  
 e) 1,579                      f) -1,199
- a)  $\frac{2}{5} \log_3 x = 0,64$   
 b)  $\log_3 9 + 2 \log_3 x = 2 + 2 \cdot 1,6 = 5,2$   
 c)  $\frac{-1}{2} \log_3 x = -0,8$
- a)  $2 \log A + \log B - 3 \log C = -8,6$   
 b)  $\frac{2}{3} \log A - \frac{2}{3} - \log B = -2,167$   
 c)  $\frac{\log A + \log B - \log C}{2} = -1,4$   
 d)  $-1 + 2 \log A + 3 \log B = -1,3$   
 e)  $\frac{2}{3} \log A + \frac{1}{3} \log B - 1 - \log C = -3,867$   
 f)  $\frac{5}{6} \log A + 3 \log B - \frac{1}{2} \log C = -0,05$

- a)  $\log_2 \frac{A^2}{B^3}$                       b)  $\ln \frac{AB^2}{C}$   
 c)  $\log \frac{\sqrt{A} C^2}{\sqrt[3]{B}}$                       d)  $\log \frac{\sqrt[4]{A^3}}{\sqrt[5]{B^2}}$   
 e)  $\ln \frac{\sqrt[3]{A^2}}{B\sqrt{C^3}}$

- a)  $x = \frac{25}{2}$                       b)  $x = 72$   
 c)  $x = 4$                       d)  $x = 27$   
 e)  $x = \frac{45}{4}$

### Página 16

- a)  $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$                       b) 6, 18, 54  
 c)  $\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}$                       d)  $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$   
 e) -2, 2, -2                      f)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$   
 g) 0, 5, 8                      h) 0, 2, 4  
 i)  $\frac{9}{2}, 3, \frac{81}{28}$

### Página 17

- a)  $\frac{6}{7}, \frac{7}{8}; a_n = \frac{n+1}{n+2}$   
 b) 64, 128;  $b_n = 2^n$   
 c) 3, -3;  $c_n = (-1)^n \cdot 3$   
 d) 18, 21;  $d_n = 3n$
- a)  $a_n = 2n + 1$                       b)  $b_n = \frac{n}{2}$   
 c)  $c_n = \frac{1}{2^n}$                       d)  $d_n = 10^{-n}$   
 e)  $e_n = \frac{n^2}{n+1}$                       f)  $f_n = (-3)^{n-1}$